

**LIMOS- MAAD-AGC**

**Thesis supervisor:** *Lhouari Nourine (Pr)*, email : [Lhouari.nourine@uca.fr](mailto:Lhouari.nourine@uca.fr)

**Title of PhD subject:** Algorithms and structure stable matchings

**Summary :**

Le **problème des mariages stables (SMP)** est un problème classique d'optimisation combinatoire, qui est extrêmement pertinent pour les économistes, les informaticiens, les mathématiciens et les spécialistes de la théorie des jeux, depuis son introduction par Gale et Shapley en 1962.

Selon Gusfield et Irving (2002), le terme *mariage* signifie que les individus ou les éléments des ensembles participant au problème doivent être mis en correspondance ou assignés les uns aux autres, sur la base d'un certain critère spécifié. Dans ce problème, le critère est d'atteindre la stabilité, en tenant compte des préférences fixées par les participants.

Ce cadre général fournit un modèle pour l'application de ce problème dans certains cas particuliers. Dans le problème classique du mariage stable, l'objectif est de créer un appariement un-à-un entre deux ensembles de même taille, représentant le mariage hétérosexuel entre hommes et femmes. Une autre application pertinente est l'affectation des étudiants aux universités ou des internes aux hôpitaux, en veillant à ce que les institutions n'admettent pas plus d'étudiants ou d'internes que le nombre de places disponibles (Gusfield et Irving, 2002).

Chaque agent dans le SMP possède une fonction de choix particulière qui détermine ses préférences vis-à-vis des agents du second groupe. Il existe deux propriétés fondamentales liées à la théorie des fonctions de choix qui sont suffisantes pour garantir l'existence de couplages stables, comme le rapporte Roth (1984) :

- **Substituabilité** : soit un agent  $a$  disponible dans l'ensemble des agents  $A$  et sélectionné. Si un sous-ensemble  $S$  est dérivé de  $A$  et que  $a$  reste disponible dans  $S$ , alors  $a$  doit être sélectionné à partir de  $S$ .
- **Indépendance vis-à-vis des alternatives rejetées** : si un agent  $a$  n'est pas choisi dans l'ensemble des agents  $A$ , alors le choix effectué dans l'ensemble  $(A - a)$  reste identique à celui effectué dans  $A$ . Autrement dit, les alternatives non choisies n'ont aucun impact sur le choix final.

L'objectif de cette thèse est d'étudier les propriétés structurelles de l'ensemble de tous les couplages stables dans le cas général, c'est-à-dire plusieurs-à-plusieurs. L'idée est de comprendre le comportement de la structure en treillis, puis de développer des algorithmes efficaces permettant d'énumérer tous les appariements stables dans le cadre plusieurs-à-plusieurs.

---

**References**

1. Jugo Fuji, Substitutable choice functions and convex geometry, Discrete Applied Mathematics, Volume 186, 2015,

2. M. Aizerman and A. Malishevski. General theory of best variants choice: Some aspects. IEEE Transactions on Automatic Control, 26(5):1030–1040, 1981.
1. Hamed Hamze Bajgiran and Federico Echenique. Closure operators: Complexity and applications to classification and decision-making. In Proceedings of the 23rd ACM Conference on Economics and Computation, EC '22, page 35–55, New York, NY, USA, 2022. Association for Computing Machinery.
2. Charles Blair. The lattice structure of the set of stable matchings with multiple partners. Math. Oper. Res., 13(4):619–628, 1988.
3. Tamas Fleiner. A fixed-point approach to stable matchings and some applications. Math. Oper. Res., 28(1):103–126, 2003.
4. Dan Gusfield, Robert Irving, Paul Leather, and Michael Saks. Every finite distributive lattice is a set of stable matchings for a small stable marriage instance. Journal of Combinatorial Theory, Series A, 44(2):304–309, 1987.
5. Yi-You Yang. Rationalizable choice functions. Games and Economic Behavior, 123:120–126, 2020.